

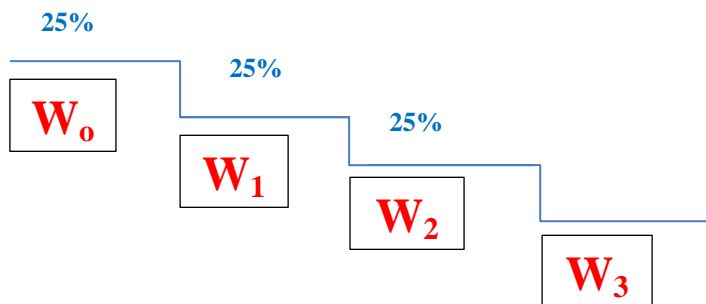
## Die exponentielle Abnahme

### Aufgabe:

Der Wert eines Autos sinkt jährlich um 25 %. Wie viel EUR beträgt der Wert des Autos nach 3 Jahren? (Neuwert des Autos: 25 000,00 EUR)

### Skizze:

| 1. Jahr      | 2. Jahr      | 3. Jahr      |



### Berechnung von $W_3$ über den Dreisatz:

#### Berechnung von $W_1$ :

$$100 \% \triangleq 25000,00 \text{ EUR}$$

$$1 \% \triangleq 250,00 \text{ EUR}$$

$$75 \% \triangleq 18750,00 \text{ EUR}$$

#### Berechnung von $W_2$ :

$$100 \% \triangleq 18750,00 \text{ EUR}$$

$$1 \% \triangleq 187,50 \text{ EUR}$$

$$75 \% \triangleq 14062,50 \text{ EUR}$$

#### Berechnung von $W_3$ :

$$100 \% \triangleq 14062,50 \text{ EUR}$$

$$1 \% \triangleq 140,6250 \text{ EUR}$$

$$75 \% \triangleq 10546,875 \text{ EUR}$$

$$\approx \underline{\underline{10546,88 \text{ EUR}}}$$

### Berechnung von $W_3$ über den Wachstumsfaktor $q$ :

Die Wachstumsrate ist hier negativ und beträgt -25%.

$$\text{Also: } q = 1 + \left(-\frac{p}{100}\right) = 1 - \frac{p}{100} = 1 - \frac{25}{100} = 1 - 0,25 = 0,75$$

### Exkurs: Umrechnung von Prozentsatz in den Wachstumsfaktor

Prozentsatz	Wachstumsfaktor $q$
$p \% = \frac{p}{100}$	$1 - \frac{p}{100}$
$5 \% = \frac{5}{100}$	$1 - \frac{5}{100} = 1 - 0,05 = 0,95$
$6,4 \% = \frac{6,4}{100}$	$1 - \frac{6,4}{100} = 1 - 0,064 = 0,936$
$25 \% = \frac{25}{100}$	$1 - \frac{25}{100} = 1 - 0,25 = 0,75$
$50 \% = \frac{50}{100}$	$1 - \frac{50}{100} = 1 - 0,50 = 0,50$
$99 \% = \frac{99}{100}$	$1 - \frac{99}{100} = 1 - 0,99 = 0,01$
$100 \% = \frac{100}{100}$	$1 - \frac{100}{100} = 1 - 1 = 0,0$

### Berechnung von $W_1$ :

$$\begin{aligned} W_1 &= W_0 \cdot q \\ &= 25000,00 \text{ EUR} \cdot 0,75 \\ &= 18750,00 \text{ EUR} \end{aligned}$$

### Berechnung von $W_2$ :

$$\begin{aligned} W_2 &= W_1 \cdot q \\ &= 18750,00 \text{ EUR} \cdot 0,75 \\ &= 14062,50 \text{ EUR} \end{aligned}$$

### Berechnung von $W_3$ :

$$\begin{aligned} W_3 &= W_2 \cdot q \\ &= 14062,50 \text{ EUR} \cdot 0,75 \\ &= 10546,875 \text{ EUR} \\ &\approx \underline{\underline{10546,88 \text{ EUR}}} \end{aligned}$$

**Berechnung von  $W_3$  mit der Formel für exponentielles Wachstum:**

$$W_3 = W_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^3$$

oder

$$\begin{aligned} W_3 &= W_0 \cdot (f)^3 \\ &= 25000 \text{ EUR} \cdot (0,75)^3 \\ &= 10545,875 \text{ EUR} \\ &\approx \underline{\underline{10546,88 \text{ EUR}}} \end{aligned}$$

**Gegenüberstellung: Exponentielles Wachstum – Exponentielle Abnahme**

<b>Exponentielles Wachstum</b>	<b>Exponentielle Abnahme</b>
$W_0$ (Anfangswert)	$W_0$ (Anfangswert)
$W_n$ (Endwert)	$W_n$ (Endwert)
Prozentsatz des Wachstums (= positive Wachstumsrate) $+ \frac{p}{100}$	Prozentsatz des Wachstums (= negative Wachstumsrate) $- \frac{p}{100}$
Wachstumsfaktor $q = 1 + \frac{p}{100}$	Wachstumsfaktor $q = 1 - \frac{p}{100}$
n (Anzahl der Zeitabschnitte)	n (Anzahl der Zeitabschnitte)
<b>Formel: <math>W_n = W_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n</math></b> <b>oder</b> <b><math>W_n = W_0 \cdot (q)^n</math></b> <b>(<math>q &gt; 1</math>)</b>	<b>Formel: <math>W_n = W_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n</math></b> <b>oder</b> <b><math>W_n = W_0 \cdot (q)^n</math></b> <b>(<math>0 &lt; q &lt; 1</math>)</b>

