Lineare Gleichungssysteme (Einführung)

Was ist ein lineares Gleichungssystem?

Bei einem linearen Gleichungssystem geht um zwei lineare Gleichungen.

Beispiel:

$y = x + 2$

(Bei jeder linearen Gleichung haben wir zwei unbekannte Variablen x und y)

$y = 2x - 1$

Wenn man zwei lineare Gleichungen in Beziehung zueinander bringt, ergibt sich ein Gleichungssystem.

Schreibweise des Gleichungssystems:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & y = x + 2 \\ \text{II} & y = 2x - 1 \end{array}\right\} \quad \text{System}$$

Ziel des linearen Gleichungssystems:
Werte für x und y herausfinden, die für beide Gleichungen passen.

Lineares Gleichungssystem zeichnerisch lösen

Ziel des linearen Gleichungssystems:
Werte für x und y herausfinden, die für beide Gleichungen passen.
Es soll also ein Punkt (x/y) gefunden werden, der auf beiden Geraden liegt.
Dies muss also der Schnittpunkt beider Geraden sein.

Lineares Gleichungssystem rechnerisch lösen

Für das rechnerische Lösen von linearen Gleichungssystemen haben wir verschiedene Verfahren zur Auswahl: Gleichsetzungsverfahren, Einsetzungsverfahren, Additionsverfahren und das Subtraktionsverfahren.

1. Gleichsetzungsverfahren

Man setzt die beiden Gleichungen gleich.

I $\quad y = x + 2$
II $\quad y = 2x - 1$

Folgendes ist sicher:

$$\begin{aligned} y &= y \\ x + 2 &= 2x - 1 && \mid -x \\ x - x + 2 &= 2x - 1 - x \\ 2 &= x - 1 && \mid +1 \\ \underline{\underline{3}} &\underline{\underline{= x}} \end{aligned}$$

Äquivalenzumformungen

<u>x in I einsetzen:</u>

$$\begin{aligned} y &= x + 2 \\ y &= 3 + 2 \\ \underline{\underline{y}} &\underline{\underline{= 5}} \end{aligned}$$

Lösung: x = 3, y = 5

Lösungsmenge L = $\{(3/5)\}$

Die Lösungsmenge ist hier ein Wertepaar.

2. Einsetzungsverfahren

Man setzt etwas aus der einen Gleichung in der anderen Gleichung ein.

I $\quad 2y + x = 4$
II $\quad y = 2x - 1$

Folgendes ist sicher:

$y = \boxed{2x - 1} \longleftarrow$ Term für die Variable y

In Gleichung I kann also die y-Variable durch diesen Term ersetzt werden.

<u>y in I einsetzen:</u>

$$
\begin{aligned}
\text{I} \quad 2 \cdot y + x &= 4 \\
2 \cdot (\boxed{2x - 1}) + x &= 4 && \text{Distributivgesetz} \\
2 \cdot 2x - 2 \cdot 1 + x &= 4 \\
4x - 2 + x &= 4 \quad | + 2 && \text{Äquivalenzumformungen} \\
5x &= 6 \quad | :5 \\
x &= \frac{6}{5} \\
\underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 1{,}2}}
\end{aligned}
$$

<u>x in II einsetzen</u>:

$y = 2x - 1$
$y = 2 \cdot 1{,}2 - 1$
$y = 2{,}4 - 1$
$\underline{\underline{y = 1{,}4}}$

$L = \{(1{,}2 / 1{,}4)\}$

2. Additionssverfahren

Durch geschicktes Umformen einer Gleichung und anschließender Addition von der ersten und der zweiten Gleichung soll erreicht werden, dass eine unbekannte Variable x oder auch y wegfällt.

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & y + 2x & = & -4 \\ \text{II} & 2y - x & = & -1 \end{array}$$

Die Addition erfolgt direkt untereinander.

$$\begin{array}{llllll} \text{I} & y & +\ 2x & = & -4 \\ & + & + & & + \\ \text{II} & 2y & -\ x & = & -1 \\ \hline & y + 2y & + 2x + (-x) & = & -4 + (-1) \\ & 3y & + \quad x & = & -5 \end{array}$$

Leider ist hier keine Variable weggefallen!!!

Wir müssen also durch eine Äquivalenzumformung eine Gleichung so verändern, dass bei der Addition eine Variable wegfällt.

$$\begin{array}{lllll} \text{I} & y & +\ 2x & = & -4 \\ & + & + & & + \\ \text{II} & 2y & -\ x & = & -1 \\ \hline \end{array}$$

Äquivalenzumformung von II

$$\begin{array}{llll} 2y \quad - x & = & -1 & \mid \cdot 2 \\ (2y - x) \cdot \ 2 & = & -1 \cdot 2 & \\ 4y \quad - 2x & = & -2 & \end{array}$$

Dadurch ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lllll} \text{I} & y & +\ 2x & = & -4 \\ & + & + & & + \\ \text{II'} & 4y & -\ 2x & = & -2 \\ \hline \end{array}$$

(II' bedeutet: II verändert)

$$\begin{array}{lll} y + 4y \quad + 2x + (-2x) & = & -4 + (-2) \\ 5y \quad + 2x \ - \ 2x & = & -4 \ - \ 2 \\ 5y & = & -6 \qquad \mid :5 \\ \underline{\underline{y}} & \underline{\underline{=}} & \underline{\underline{-1{,}2}} \end{array}$$

y in I einsetzen:

$$\begin{aligned} \text{I} \qquad y + 2x &= -4 \\ -1{,}2 + 2x &= -4 \qquad |+1{,}2 \\ 2x &= -2{,}8 \qquad |:2 \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= -1{,}4}} \end{aligned}$$

$$L = \{(-1{,}4 / -1{,}2)\}$$

2. Subtraktionssverfahren

Durch geschicktes Umformen einer Gleichung und anschließender Subtraktion von der ersten und der zweiten Gleichung soll erreicht werden, dass eine unbekannte Variable x oder auch y wegfällt.

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & y + 2x & = & -4 \\ \text{II} & 2y - x & = & -1 \end{array}$$

Die Addition erfolgt direkt untereinander.

$$\begin{array}{llcll} \text{I} & y & + 2x & = & -4 \\ & - & - & & - \\ \text{II} & 2y & - x & = & -1 \\ \hline & y - 2y & + 2x - (-x) & = & -4 - (-1) \\ & -y & + 3x & = & -3 \end{array}$$

Leider ist hier keine Variable weggefallen!!!

Wir müssen also durch eine Äquivalenzumformung eine Gleichung so verändern, dass bei der Subtraktion eine Variable wegfällt.

$$\begin{array}{llcll} \text{I} & y & + 2x & = & -4 \\ & - & - & & - \\ \text{II} & 2y & - x & = & -1 \\ \hline \end{array}$$

<u>Äquivalenzumformung von I</u>

$$\begin{array}{lcll} y + 2x & = & -4 & \mid \cdot 2 \\ (y + 2x) \cdot 2 & = & -4 \cdot 2 & \\ 2y + 4x & = & -8 & \end{array}$$

Dadurch ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llcll} \text{I'} & 2y & + 4x & = & -8 \\ & - & - & & - \\ \text{II'} & 2y & - x & = & -1 \\ \hline \end{array}$$

(I' bedeutet: I verändert)

$$\begin{array}{rcll} 2y - 2y + 4x - (-x) & = & -8 - (-1) & \\ 4x + x & = & -8 + 1 & \\ 5x & = & -7 & \mid :5 \\ \underline{\underline{x}} & \underline{\underline{=}} & \underline{\underline{-1{,}4}} & \end{array}$$

x in II einsetzen:

II	$2y - x = -1$	
	$2y - (-1{,}4) = -1$	
	$2y + 1{,}4 = -1$	$\mid -1{,}4$
	$2y = -1 - 1{,}4$	
	$2y = -2{,}4$	$\mid :2$
	$\underline{\underline{y = -1{,}2}}$	

$L = \{(-1{,}4 / -1{,}2)\}$