

Lösen von Gleichungen durch Äquivalenzumformungen

äquivalent = gleich

1. Was sind äquivalente Gleichungen?

Zwei Gleichungen sind äquivalent, wenn sie die gleiche Lösungsmenge haben.

Beispiel:

$$3x + 7 = 16 \quad | -7$$

$$3x = 9 \quad | :3$$

$$x = 3$$

$$L = \{3\}$$

$$2x + 3 = 9 \quad | -3$$

$$2x = 6 \quad | :2$$

$$x = 3$$

$$L = \{3\}$$

2. Was sind nicht äquivalente Gleichungen?

Zwei Gleichungen sind nicht äquivalent, wenn sie unterschiedliche Lösungsmengen haben.

Beispiel:

$$3x + 7 = 16 \quad | -7$$

$$3x = 9 \quad | :3$$

$$x = 3$$

$$L = \{3\}$$

$$5x - 4 = 16 \quad | +4$$

$$5x = 20 \quad | :5$$

$$x = 4$$

$$L = \{4\}$$

3. Gleichungen durch Äquivalenzumformungen lösen

Durch Äquivalenzumformungen kann man Gleichungen verändern (umformen), ohne die Lösungsmenge zu ändern.

Man macht so viele Äquivalenzumformungen, bis am Schluss die gesuchte Variable isoliert ist:

$$x = \dots$$

Welche Äquivalenzumformungen sind erlaubt (d.h. ändern die Lösungsmenge nicht)?

→ Addition oder Subtraktion der gleichen Zahl oder des gleichen Terms

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} 2x - 4 &= 8 && | +4 \\ 2x - 4 + 4 &= 8 + 4 \end{aligned}$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} 2x - 4 &= 8 && | - 2 \\ 2x - 4 - 2 &= 8 - 2 \end{aligned}$$

→ Multiplikation von beiden Seiten mit der gleichen Zahl oder des gleichen Terms (Zahl, Term darf nicht Null sein)

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x - 4 &= 8 && | \cdot 2 \\ \left\{ \frac{1}{2}x - 4 \right\} \cdot 2 &= 8 \cdot 2 \end{aligned}$$

→ Division von beiden Seiten mit der gleichen Zahl oder des gleichen Terms (Zahl, Term darf nicht Null sein)

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} 2a x &= 2a && | : 2a \\ 2a : 2a \cdot x &= 2a : 2a \end{aligned}$$

Welche Schritte soll man beim Lösen von Gleichungen (Äquivalenzumformungen) nacheinander durchlaufen?

Schritt 1: Klammern auflösen

Schritt 2: Gleichartige Variablen zusammenfassen, Zahlen zusammenfassen

Schritt 3: Die Variablen auf die linke Seite bringen, die Zahlen auf die rechte Seite bringen

Schritt 4: Variable isolieren durch Multiplikation oder Division

Beispiel:

$$2(3x + 3) = 5 + 8x + 7 - 6x \quad \rightarrow \text{Schritt 1}$$

$$6x + 6 = 5 + 8x + 7 - 6x \quad \rightarrow \text{Schritt 2}$$

$$6x + 6 = 2x + 12 \quad | -2x \quad | -6 \quad \rightarrow \text{Schritt 3}$$

$$4x = 6 \quad | :4 \quad \rightarrow \text{Schritt 4}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$L = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$